

IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제6장 연속 시간 푸리에 변환

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 비주기 신호는 주파수에 대해 (이산, 연속)인 스펙트럼을 가진다.

Ans) 연속

(2) 모든 신호에 대해 푸리에 변환이 가능하다. (○, ×)

Ans) ×

(3) (에너지, 전력) 신호는 푸리에 변환의 수렴 조건을 만족한다.

Ans) 에너지

(4) 전력 신호의 푸리에 변환은 임펄스 함수를 포함한다. (○, ×)

Ans) ○

(5) 주기 신호의 푸리에 급수와 푸리에 변환은 선 스펙트럼 간격이 (같다, 다르다).

Ans) 같다

(6) (CT)FT는 시간 신호와 스펙트럼이 역할을 맞바꾸어도 변환쌍이 유지된다. (○, ×)

Ans) ○

(7) 실수 신호의 (진폭 스펙트럼, 위상 스펙트럼)은 우대칭을 만족한다.

Ans) 진폭 스펙트럼

(8) 실수 기함수 신호의 스펙트럼은 (실수, 허수, 복소수)이다.

Ans) 허수

(9) 시간 이동된 신호는 원 스펙트럼에서 진폭과 위상 스펙트럼 모두 변한다. (○, ×)

Ans) ×

(10) 시간축 상에서 신호를 압축하면 주파수축 상에서 스펙트럼이 (압축된다, 늘어난다).

Ans) 늘어난다

(11) (CT)FT는 곱-컨벌루션 쌍대성이 성립한다. (○, ×)

Ans) ○

(12) 진폭 변조의 주된 목적은 스펙트럼의 (변형, 대역 이동)이다.

Ans) 대역 이동

(13) 신호의 다른 주파수 성분끼리도 에너지를 형성한다. (○, ×)

Ans) ×

(14) 주파수 응답은 입력의 형태에 따라 달라진다. (○, ×)

Ans) ×

(15) 시스템 미분 방정식의 계수에 의해 주파수 응답이 결정된다. (○, ×)

Ans) ○

(16) 출력의 진폭 스펙트럼은 입력의 진폭 스펙트럼과 진폭 응답의 (합, 곱)이다.

Ans) 곱

(17) 출력의 위상 스펙트럼은 입력의 위상 스펙트럼과 위상 응답의 (합, 곱)이다.

Ans) 합

(18) 모든 주파수 성분을 지닌 백색 잡음을 주파수 선택 필터로 걸러낼 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(19) (이상적인, 물리적인) 주파수 선택 필터는 천이 대역을 가진다.

Ans) 물리적인

(20) 차단 주파수는 최대 이득에 대해 (전력, 이득)이 반이 되는 주파수이다.

Ans) 전력

[기초 문제]

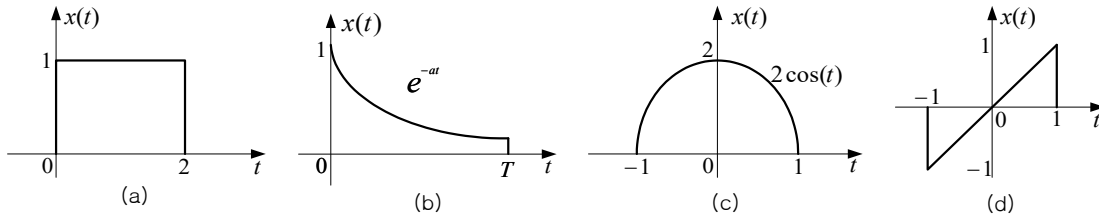
6.1 다음 신호 중에서 푸리에 변환이 존재하는 것을 모두 골라라.

㉠ $x(t) = t $	㉡ $x(t) = t u(t)$	㉢ $x(t) = \frac{1}{t}$
㉣ $x(t) = e^{-2 t }$	㉤ $x(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$	

Ans) ㉣ ㉤

6.2 다음 그림의 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 다음의 두 방법으로 구하라.

- (i) 정의식(적분식)을 이용
(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용



(a)

Ans) (i) 정의식(적분식)을 이용

$$X(\omega) = \int_0^2 e^{-j\omega t} dt = 2e^{-j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 시간 이동 성질을 이용

$$X(\omega) = 2e^{-j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

(b)

Ans) (i) 정의식(적분식)을 이용

$$X(\omega) = \int_0^T e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a+j\omega} (1 - e^{-T(A+j\omega)})$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 선형성과 시간 이동 성질을 이용

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} (1 - e^{-T(a+j\omega)})$$

(c)

Ans) (i) 정의식(적분식)을 이용

$$X(\omega) = \int_{-1}^1 2\cos(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega-1} \sin(\omega-1) + \frac{2}{\omega+1} \sin(\omega+1) = 2\left(\text{sinc}\left(\frac{\omega+1}{\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega-1}{\pi}\right)\right)$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 변조 성질을 이용

$$X(\omega) = 2\left(\text{sinc}\left(\frac{\omega+1}{\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega-1}{\pi}\right)\right)$$

(d)

Ans) (i) 정의식(적분식)을 이용

$$X(\omega) = \int_{-1}^1 t e^{-j\omega t} dt = j \frac{2}{\omega^2} (\omega \cos(\omega) - \sin(\omega))$$

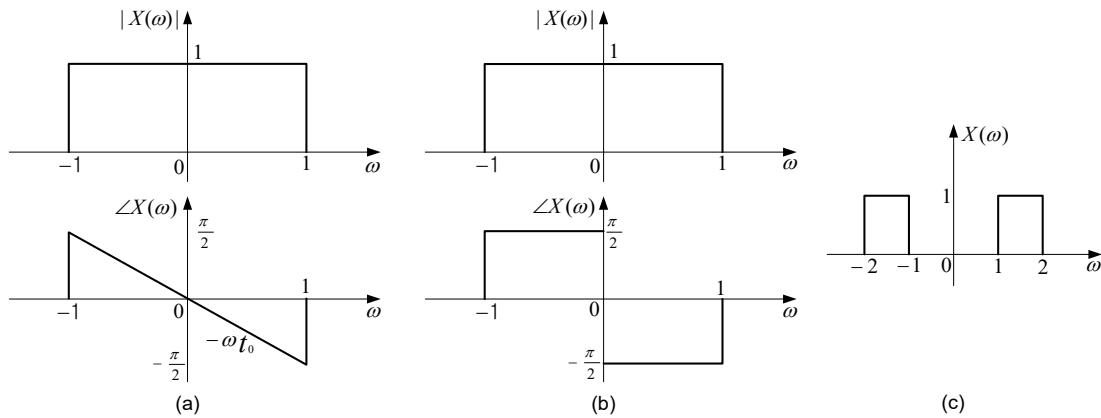
(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 주파수 미분 성질을 이용

$$X(\omega) = j2 \frac{\omega \cos(\omega) - \sin(\omega)}{\omega^2}$$

6.3 다음 그림의 스펙트럼 $X(\omega)$ 의 푸리에 역변환을 다음의 두 방법으로 구하라.

(i) 정의식(적분식)을 이용

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용



(a)

Ans) (i) 정의식을 이용

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(t - \frac{\pi}{2})}{\pi(t - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(\frac{t}{\pi} - \frac{1}{2})$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 시간 이동 성질을 이용

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(\frac{t - \pi/2}{\pi}) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(\frac{t}{\pi} - \frac{1}{2})$$

(b)

Ans) (i) 정의식을 이용

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^0 j e^{j\omega t} d\omega + \int_0^1 -j e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1 - \cos(t)}{\pi t}$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 주파수 이동 성질을 이용

$$x(t) = \frac{2}{\pi t} \sin(\frac{1}{2}t) \sin(\frac{1}{2}t) = \frac{1}{\pi t} (1 - \cos(t))$$

(c)

Ans) (i) 정의식을 이용

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{-1} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_1^2 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t} (\sin(2t) - \sin(t))$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 주파수 이동 성질을 이용

$$x(t) = \frac{2}{\pi t} \sin(\frac{1}{2}t) \cos(\frac{3}{2}t) = \frac{1}{\pi t} (\sin(2t) - \sin(t))$$

6.4 푸리에 변환의 성질을 이용하여 다음의 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = e^{2t}u(-t)$

Ans) 시간 반전 성질을 이용

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j(-\omega)} = \frac{1}{2 - j\omega}$$

(b) $x(t) = e^{-2|t|}$

Ans) 시간 반전 성질과 선형성을 이용

$$X(\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

(c) $x(t) = \text{sinc}(t) * \text{sinc}(t)$

Ans) 시간 컨벌루션 성질을 이용

$$X(\omega) = \text{rect}(\omega/2\pi)$$

(d) $x(t) = \text{sinc}^2(t)$

Ans) 주파수 컨벌루션 성질을 이용

$$X(\omega) = \text{tri}(\omega/2\pi)$$

(e) $x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-\pi t}u(t))$

Ans) 미분 성질을 이용

$$X(\omega) = (j\omega) \frac{1}{\pi + j\omega} = \frac{\omega}{\omega - j\pi}$$

(f) $x(t) = e^{-\pi t} \sin(\omega_0 t)u(t)$

Ans) 주파수 컨벌루션 성질을 이용

$$X(\omega) = \frac{j}{2} \frac{1}{\pi + j(\omega + \omega_0)} - \frac{j}{2} \frac{1}{\pi + j(\omega - \omega_0)} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - (\omega - j\pi)^2} = \frac{\omega_0}{j2\pi\omega + \omega_0^2 - \omega^2 + \pi^2}$$

6.4 푸리에 변환의 성질을 이용하여 다음의 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = u(t) - u(t-4)$

Ans) (i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) - u(t-4)] e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j2\omega}}{j\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) = \frac{2e^{-j2\omega}}{\omega} \sin(2\omega)$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 선형성과 시간 이동 성질을 이용

$$X(\omega) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) (1 - e^{-j4\omega}) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j4\omega}) = \frac{2e^{-j2\omega}}{\omega} \sin(2\omega)$$

(b) $x(t) = e^{-2t} [u(t) - u(t-4)]$

Ans) (i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} [u(t) - u(t-4)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-4(2+j\omega)}}{2 + j\omega}$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 선형성과 시간 이동 성질을 이용

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} (1 - e^{-4(j\omega + 2)})$$

(c) $x(t) = t[u(t) - u(t-4)]$

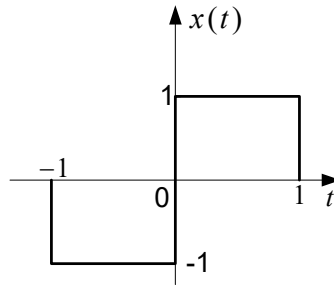
Ans) (i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t[u(t) - u(t-4)]e^{-j\omega t} dt = -\frac{4e^{-j4\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j4\omega} - 1}{\omega^2} = \frac{e^{-j4\omega}(1 + j4\omega) - 1}{\omega^2}$$

(ii) 푸리에 변환의 성질을 이용 : 주파수 미분 성질을 이용

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega^2}(e^{-j4\omega} - 1) + j\frac{4}{\omega}e^{-j4\omega} = \frac{e^{-j4\omega}(1 + j4\omega) - 1}{\omega^2}$$

6.5 다음 그림의 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 다음과 같이 구하라.



(a) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$\text{Ans)} X(\omega) = \int_{-1}^0 (-1)e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 1e^{-j\omega t} dt = j\frac{2}{\omega}(\cos(\omega) - 1) = \frac{2}{j\omega}(1 - \cos(\omega))$$

(b) 시간 이동 성질을 이용

$$\text{Ans)} X(\omega) = -(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})(e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2) = -\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2) = \frac{2}{j\omega}(1 - \cos(\omega))$$

(c) 시간 미분과 시간 이동 성질을 이용

$$\text{Ans)} x'(t) = -\delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}X'(\omega) = \frac{2}{j\omega}(1 - \cos(\omega))$$

(d) 시간 컨벌루션 및 시간 이동 성질을 이용

$$\text{Ans)} x(t) = \text{rect}(t) * (\delta(t - \frac{1}{2}) - \delta(t + \frac{1}{2}))$$

$$X(\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})(e^{-j\frac{1}{2}\omega} - e^{j\frac{1}{2}\omega}) = \frac{2}{j\omega}\sin^2(\frac{\omega}{2}) = \frac{2}{j\omega}(1 - \cos(\omega))$$

6.6 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환이 다음 식과 같을 때, 다음에 대한 푸리에 변환을 구하라.

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

(a) $x(2t)$

Ans) $x_1(t) = x(2t)$, 시간 척도조절 성질을 이용

$$X_1(\omega) = \frac{1}{2}X\left(\frac{1}{2}\omega\right) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

(b) $x(3t - 6)$

Ans) $x_2(t) = x(3t - 6) = x(3(t - 2))$, 시간 척도조절과 시간 이동 성질을 이용

$$X_2(\omega) = \frac{1}{3}X\left(\frac{1}{3}\omega\right)e^{-j2\omega} = \frac{e^{-j2\omega}}{3 + j\omega}$$

(c) $x(t) * x(t - 2)$

Ans) $x_3(t) = x(t) * x(t-2)$, 시간 컨벌루션 성질과 시간 이동 성질을 이용

$$X_3(\omega) = X(\omega)X(\omega)e^{-j2\omega} = \frac{e^{-j2\omega}}{1-\omega^2+j2\omega}$$

(d) $x(t)\sin(2\pi t)$

Ans) $x_4(t) = x(t)\sin(2\pi t)$, 주파수 컨벌루션 성질을 이용

$$X_4(\omega) = j\frac{1}{2}[X(\omega+2\pi) - X(\omega-2\pi)] = \frac{1}{2(\omega+2\pi)-j2} - \frac{1}{2(\omega-2\pi)-j2}$$

6.7 푸리에 변환이 다음과 같을 때, 각 경우에 해당하는 신호 $x(t)$ 를 구하라.

(a) $X(\omega) = 2\cos(2\omega)\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi})$

Ans) $\delta(t+t_0) \Leftrightarrow e^{j\omega t_0}$ 임을 이용하면

$$\cos(2\omega) = \frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(t+2) + \delta(t-2)]$$

또한 푸리에 변환쌍표로부터

$$\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{t}{2})$$

푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질을 이용하면

$$X(\omega) = 2\cos(2\omega)\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}) \Leftrightarrow [\delta(t+2) + \delta(t-2)] * \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{t}{2})$$

$s(t) * \delta(t-t_0) = s(t-t_0)$ 임을 이용하면

$$x(t) = [\delta(t+2) + \delta(t-2)] * \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}[\text{rect}(\frac{t+2}{2}) + \text{rect}(\frac{t-2}{2})]$$

(b) $X(\omega) = j\omega[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$

Ans) $X(\omega)$ 를 다시 쓰면

$$X(\omega) = (j\omega)\text{rect}(\omega/2)$$

$V(\omega) = \text{rect}(\omega/2)$ 라고 하면 시간 미분 성질에 의해

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow (j\omega)V(\omega) = X(\omega)$$

$$v(t) = \frac{1}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t}$$

따라서 $x(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{\pi t}\cos(t) - \frac{1}{\pi t^2}\sin(t) = \frac{1}{\pi t}(\cos(t) - \text{sinc}(\frac{t}{\pi}))$$

(c) $X(\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega-2\pi}{\pi}) + \text{sinc}(\frac{\omega+2\pi}{\pi})$

Ans) 푸리에 변환쌍표와 주파수 이동 성질로부터

$$\text{sinc}(\frac{\omega-2\pi}{\pi}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{t}{2})e^{j2\pi t}$$

$$\text{sinc}(\frac{\omega+2\pi}{\pi}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{t}{2})e^{-j2\pi t}$$

따라서

$$x(t) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \cos(2\pi t)$$

(d) $X(\omega) = j[u(-\omega) - u(\omega)]$

Ans) 주어진 $X(\omega)$ 를 다시 쓰면

$$X(\omega) = j[u(-\omega) - u(\omega)] = j \text{sgn}(-\omega)$$

푸리에 변환쌍표로부터

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

푸리에 변환의 시간-주파수 쌍대성으로부터

$$\frac{2}{jt} \Leftrightarrow 2\pi \text{sgn}(\omega)$$

$$\therefore x(t) = j \frac{1}{2\pi} \frac{2}{jt} = \frac{1}{\pi t}$$

6.8 LTI 시스템의 입력 $x(t)$ 와 출력 $y(t)$ 가 다음과 같을 때, 시스템의 주파수 응답과 임펄스 응답, 그리고 시스템 표현 미분 방정식을 구하라.

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $y(t) = e^{-t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2+j\omega}{1+j\omega}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

(b) $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$, $y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{1}{9+3(j\omega)}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

$$3\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = x(t)$$

(c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $y(t) = 2te^{-2t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{2}{2+j\omega}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

(d) $x(t) = 6e^{-t}u(t)$, $y(t) = (e^{-t} + 3e^{-3t} - 4e^{-4t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

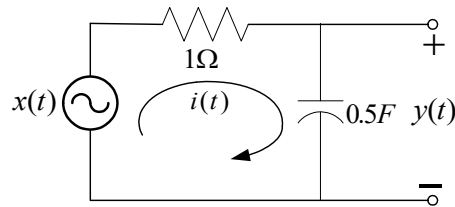
(2) 임펄스 응답

$$h(t) = (2e^{-4t} - e^{-3t})u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

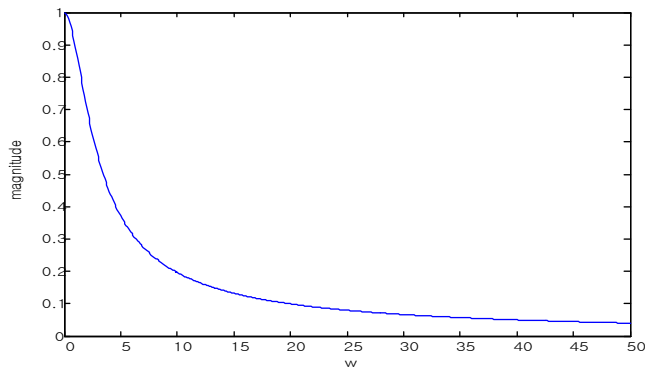
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

6.9 다음 그림의 RC 회로는 전압전원 $x(t)$ 를 입력, C 양단의 전압 $y(t)$ 를 출력으로 한다.



(a) 회로의 주파수 응답을 구하고 그려라. 이 회로는 어떤 필터인가?

Ans) $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{RC(j\omega) + 1} = \frac{2}{j\omega + 2}$, 저역 통과 필터.

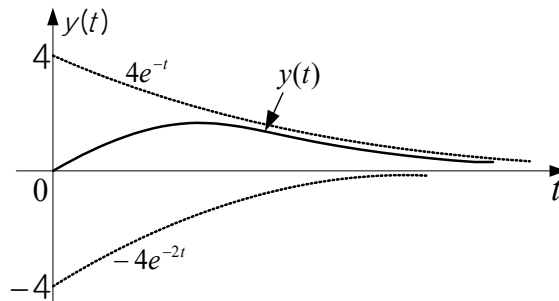


(b) 이 회로의 임펄스 응답을 구하라.

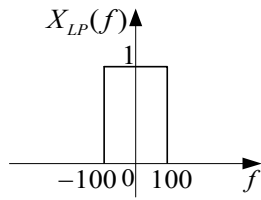
Ans) $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega + 2}\right\} = 2e^{-2t}u(t)$

(c) $x(t) = 2e^{-t}u(t)$ 를 입력으로 인가할 때 출력 $y(t)$ 를 구하라.

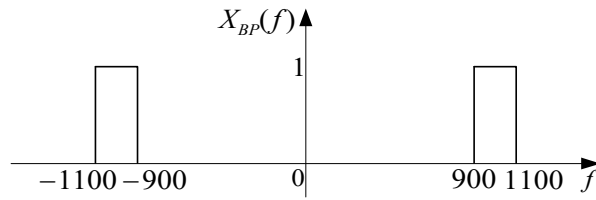
Ans) $y(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$



6.10 다음 그림은 저역 통과 필터와 대역 통과 필터의 주파수 응답이다. 물음에 답하라.



(a) 저역 통과 필터



(b) 대역 통과 필터

(a) 그림 (a)와 같이 차단 주파수가 100 [Hz]인 저역 통과 필터의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $h_{LP}(t) = 200 \text{ sinc}(200t)$

(b) (a)의 결과와 푸리에 변환의 성질을 이용하여 그림 (b)의 대역폭이 200 [Hz]이고 대역 중심 주파수가 1 [kHz]인 대역 통과 필터의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $H_{BP}(f) = H_{LP}(f - 1000) + H_{LP}(f + 1000)$

$$h_{BP}(t) \equiv 2h_{LP}(t)\cos(2000\pi t) = 400 \text{ sinc}(200t)\cos(2000\pi t)$$

[응용 문제]

6.11 푸리에 변환의 성질을 이용하여 다음의 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-2|t|})$

Ans) 미분 성질을 이용

$$X(\omega) = (j\omega) \frac{4}{4 + \omega^2} = \frac{j4\omega}{4 + \omega^2}$$

(b) $x(t) = \frac{d}{dt}(te^{-2t}u(t))$

Ans) 주파수 미분 성질과 시간 미분 성질을 이용

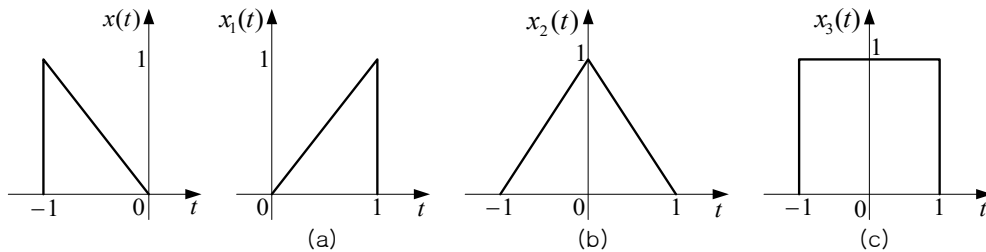
$$X(\omega) = \frac{j\omega}{(2 + j\omega)^2}$$

(c) $x(t) = \sin(2\pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$

Ans) 주파수 컨벌루션 성질을 이용

$$X(\omega) = j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + 2\pi}{\pi}\right) - j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi}{\pi}\right) = j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} + 2\right) - j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} - 2\right)$$

6.12 다음 그림의 $x(t)$ 의 푸리에 변환이 $X(\omega) = \frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1)$ 로 주어졌다. 푸리에 변환의 성질을 이용하여 나머지 신호의 푸리에 변환을 구하라.



Ans)

(a) 시간 반전 성질을 이용

$$X_1(\omega) = X(-\omega) = \frac{1}{\omega^2} [e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1]$$

(b) 시간 반전과 시간 이동 성질을 이용

$$X_2(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega} + X(-\omega)e^{j\omega} = \frac{1}{2} \frac{2^2}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

(c) 선형성을 이용

$$X_3(\omega) = X(\omega) + X_1(\omega) + X_2(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

6.13 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환이 $X(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/2)$ 일 때, 다음에 대한 푸리에 변환을 구하라.

(a) $tx(2t)$

Ans) $y(t) = tx(2t)$, 시간 척도조절과 주파수 미분 성질 이용

$$Y(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) = j \frac{1}{2} (\delta(\omega + 2) - \delta(\omega - 2))$$

(b) $(t-1)x(t+1)$

Ans) $v(t) = tx(t)$, 주파수 미분과 시간 이동 성질 이용

$$Y(\omega) = V(\omega)e^{j\omega} - 2X(\omega)e^{j\omega} = e^{j\omega} \left(j[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)] - 2\text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)$$

(c) $x(t) * \delta(t-2)$

Ans) $y(t) = x(t) * \delta(t-2)$, 시간 컨벌루션과 시간 이동 성질 이용

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j2\omega} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j2\omega}$$

(d) $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

Ans) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau = x(t) * u(t)$, 시간 컨벌루션 성질 이용

$$Y(\omega) = X(\omega)U(\omega) = \frac{1}{j\omega} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \pi\delta(\omega)$$

6.14 $X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$ 가 주어질 때,

(a) 푸리에 변환의 컨벌루션 성질을 이용하여 $x(t)$ 를 구하라.

Ans) 시간 컨벌루션 성질을 이용

$$x(t) = e^{-at}u(t) * e^{-at}u(t) = te^{-at}u(t)$$

(b) 푸리에 변환의 미분 성질을 이용하여 $x(t)$ 를 구하라.

Ans) $V(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$ & $v(t) = e^{-at}u(t)$, 주파수 미분 성질 이용

$$x(t) = tv(t) = te^{-at}u(t)$$

6.15 푸리에 변환의 시간-주파수 쌍대성 성질을 이용하여 다음 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = \delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)$

Ans) $x(-\omega) = \delta(-\omega+t_0) + \delta(-\omega-t_0) = \delta(\omega+t_0) + \delta(\omega-t_0)$

$$X(t) = 2\cos(t_0t)$$

$$X(\omega) = 2\cos(t_0\omega)$$

(b) $x(t) = \frac{1}{1+jt}$

Ans) $x(-\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$

$$X(t) = 2\pi e^t u(-t)$$

$$X(\omega) = 2\pi e^\omega u(-\omega)$$

(c) $x(t) = \frac{2a}{a+t^2}$

Ans) $x(-\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} \right)$

$$X(t) = \pi(e^{-t}u(t) + e^t u(-t)) = \pi e^{-|t|}$$

$$X(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

6.16 파스발 정리를 이용하여 다음 신호의 에너지를 구하라.

(a) $x(t) = \frac{4}{(2^2 + t^2)}$

Ans) $X(\omega) = 2\pi e^{-2|\omega|}$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi^2 e^{-4|\omega|} d\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(b) $x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{\pi}\right)$

Ans) $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right\} * \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right\} = \pi \text{tri}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2 \text{tri}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = \frac{8\pi}{3}$$

6.17 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$ 와 입력 $x(t)$ 가 다음과 같을 때, 시스템의 주파수 응답과 출력을 구하라.

(a) $h(t) = e^{-2t}u(t)$, $x(t) = e^{-3t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

(b) $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, $x(t) = 3e^{-t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{2}{2 + j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$y(t) = 6(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(c) $h(t) = 2\text{sinc}(2t)$, $x(t) = \text{sinc}(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \text{rect}(\omega/4\pi)$$

(2) 시스템 출력

$$y(t) = \text{sinc}(t)$$

(d) $h(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, $x(t) = u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

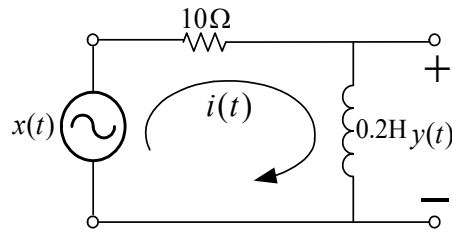
$$H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$Y(\omega) = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a + j\omega} + \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{a} (-e^{-at}u(t) + u(t)) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t)$$

6.18 다음 그림의 RL 회로는 전압전원 $x(t)$ 를 입력, L 양단의 전압 $y(t)$ 를 출력으로 한다.



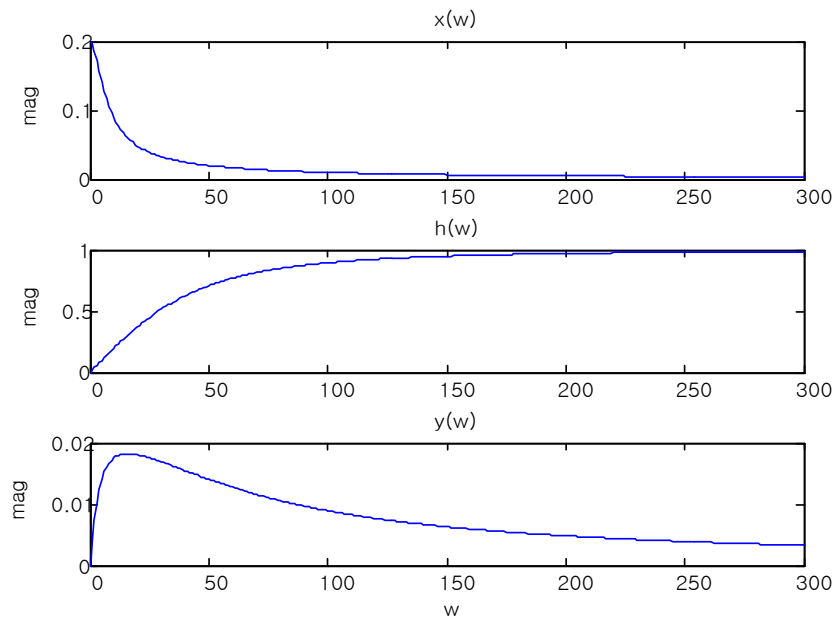
(a) 주파수 응답을 구하고 그려라. 이 회로는 어떤 필터인가?

Ans) $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega}{j\omega + 50}$

(b) 이 회로의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $h(t) = -50e^{-50t}u(t)$

(c) $y(t) = -\frac{1}{9}e^{-5t}u(t) + \frac{10}{9}e^{-50t}u(t)$



6.19 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$ 와 주기 신호 입력 $x(t)$ 가 다음과 같을 때, 시스템의 주파수 응답과 출력을 구하라.

(a) $h(t) = \text{sinc}(t)$, $x_T(t) = \text{rect}(t/2)$, $|t| \leq 2$ & $x_T(t) = x_T(t \pm 4)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \text{rect}(\omega/2\pi)$$

(2) 시스템 출력

$$Y(\omega) = \text{rect}(\omega/2\pi) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right) \right) = 2\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta(\omega) + 2\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

(b) $h(t) = 2\cos(4\pi t)\text{sinc}(t)$, $x(t) = 1 + \cos(\pi t) + \sin(4\pi t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}(\omega/2\pi) * 2\pi(\delta(\omega + 4\pi) + \delta(\omega - 4\pi)) = \text{rect}((\omega + 4\pi)/2\pi) + \text{rect}((\omega - 4\pi)/2\pi)$$

(2) 시스템 출력

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = j\pi(\delta(\omega + 4\pi) - \delta(\omega - 4\pi))$$

$$y(t) = \sin(4\pi t)$$

(c) $h(t) = 2\cos(4\pi t)\text{sinc}(t)$, $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}(\omega/2\pi) * 2\pi(\delta(\omega + 4\pi) + \delta(\omega - 4\pi)) = \text{rect}((\omega + 4\pi)/2\pi) + \text{rect}((\omega - 4\pi)/2\pi)$$

(2) 시스템 출력

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = 2\pi(\delta(\omega + 4\pi) + \delta(\omega - 4\pi))$$

$$y(t) = 2\cos(4\pi t)$$

6.20 $x(t)\cos(\omega_0 t)$ 로부터 신호 $x(t)$ 를 복구하는 과정을 복조라고 한다. 신호 $x(t)\cos(\omega_0 t)$ 에 $2\cos(\omega_0 t)$ 를 곱하고 대역폭이 W 인 저역 통과 필터를 통과시켜 복조될 수 있음을 보여라. 이때 $W < \omega_0$ 로 가정한다.

Ans) $x_1(t) = 2x(t)(\cos(\omega_0 t))(\cos(\omega_0 t)) = x(t)(1 + \cos(2\omega_0 t)) = x(t) + x(t)\cos(2\omega_0 t)$

$$X_1(\omega) = X(\omega) + X(\omega) * (\pi[\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)]) = X(\omega) + \pi X(\omega + 2\omega_0) + \pi X(\omega - 2\omega_0)$$

대역폭이 W 인 저역 통과 필터에 $x_1(t)$ 를 통과시키면 $X_1(\omega)$ 에서 $X(\omega \pm 2\omega_0)$ 성분은 필터의 통과 대역 바깥에 위치하므로 제거되고, $X(\omega)$ 만 남게 된다.

따라서 $x(t)$ 를 필터의 출력으로 얻게 되어 신호 $x(t)$ 를 복조할 수 있다.